: 1

I لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=-x+\sqrt{x^2+1} & ; \quad x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{4}{\pi}Arc\tan\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right) & ; \quad x<0 \end{cases}$$

1. أ- أدرس اتصال الدالة f في النقطة 0 .
   ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في 0 .
2. أ- بين أن : $f'(x)<0 \quad : \quad \forall x\in\mathbb{R}^*$.
   ب- أعط جدول تغيرات الدالة f محددا نهايتيها في $+\infty$ و في $-\infty$
3. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ : $\|\vec{i}\|=2cm$)
4. نضع : $I=\left[\dfrac{1}{4},1\right]$. بين أن : $f(I)\subset I$.

II نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1}=f(u_n) & ; \quad n\in\mathbb{N} \\ u_0=1 \end{cases}$$

1. بين أن : $|f'(x)|<\dfrac{4}{5} \quad : \quad \forall x\in I$.
2. باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية ، بين أن :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad : \quad \left|u_n-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|<\frac{4}{5}\left|u_{n-1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|$$

3. استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وأحسب نهايتها.
4. بين أن : $f\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) \quad : \quad \forall x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.
5. نضع : $a_n=\dfrac{2^{n+1}+(-1)^n}{3} \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}$.
   أ- تحقق من أن :

$$\begin{cases} a_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad a_{n+1}=2^{n+1}-a_n \end{cases} .$$

   ب- بين أن : $u_n=\tan\left(\dfrac{\pi a_n}{2^{n+2}}\right) \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

: 2

I لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x)=Arc\tan\left(\sqrt[3]{x^3+1}-x\right)$$

1. حدد $(\mathscr{D}_f)$ حيز تعريف الدالة f ، ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في -1 ، ثم أعط تأويلا
3. أدرس تغيرات الدالة f .
4. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.
5. لتكن g الدالة العددية المعرفة كما يلي :

$$g(x)=\frac{1}{9}\left[\left(\tan(f(x))+x\right)^3\right]-2Arc\tan x$$

   أ- حدد $(\mathscr{D}_g)$ حيز تعريف الدالة g ، ثم بين أن :

$$\forall x\in\mathscr{D}_g \quad : \quad g(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{x^3+1}{3}-2Arc\tan x\right)$$

   ب- بين أن : $\exists!\alpha\in[-1,1] \quad : \quad g(\alpha)=\alpha$.
   جـ- بين أن :

$$\exists k\in[0,1[\quad / \quad \forall x\in]-1,1[\quad : \quad |g'(x)|\leq k$$

II نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} -1\leq u_0\leq 1 \\ u_{n+1}=g(u_n) & ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. بين أن : $|u_n|\leq 1 \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}$.
2. بين أن : $|u_{n+1}-\alpha|\leq k\,|u_n-\alpha| \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}$.
3. استنتج أن : $|u_n-\alpha|\leq k^n|u_0-\alpha| \quad : \quad \forall n\in\mathbb{N}$.
4. استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة وحدد نهايتها.
5. نفترض أن $u_0=0$. حدد قيمة مقربة للعدد α بالدقة 10^{-1} .

: 3

I لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{-x^2+4x+5}$$

1. أ- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على حيز تعريفها.
   ب- أعط جدول تغيرات الدالة f.
   جـ- أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.
2. لتكن g الدالة العددية المعرفة كما يلي :

$$g(x)=\frac{2-x}{\sqrt{-x^2+4x+5}}$$

   أ- أعط جدول تغيرات الدالة g .
   ب- استنتج أن : $0\leq f'(x)<\dfrac{2}{3} \quad : \quad \forall x\in[0,2]$.
3. أثبت أن :

$$\forall x\in[0,2] \quad : \quad |f(x)-f(2)|\leq\frac{2}{3}|x-2| .$$

هندسيا للنتيجة المحصلة.

II نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad 0 < u_n < 2$.
2. أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad |u_n - 2| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
4. استنتج النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 4 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x) = x(1-x)$$

و نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} 0 < u_0 < 1 \\ u_{n+1} = u_n(1-u_n) \quad ; \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. أدرس تغيرات الدالة f ، ثم استنتج أن :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad 0 < u_n < \frac{1}{n+1}$$

2. نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث :

$$\forall n\in\mathbb{N} : \quad v_n = nu_n$$

أ- بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية .

ب- استنتج أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نهايتها l بحيث $l\in]0,1]$.

3. لتكن $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad : \quad w_n = n(v_{n+1} - v_n)$$

أ- أحسب w_n بدلالة v_n .

ب- استنتج أن $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وأن نهايتها هي $l(1-l)$.

4. نفترض فيما يلي أن : $l \ne 1$.

أ- بين أن :

$$\exists n_0\in\mathbb{N} \quad / \quad \forall n\ge n_0 : \quad v_{n+1} - v_n \ge \frac{l(1-l)}{2n}$$

ب- نضع : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad : \quad H_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad : \quad H_{2n} - H_n \ge \frac{1}{2}$.

وأن : $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

جـ- استنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

5. ماذا تستنتج ؟

التمرين 5 :

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا.

نعتبر الدالة العددية f_a ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f_a(x) = a - 1 - \sqrt[3]{a^3 - x^3} \quad ; \quad x \le a \\ f_a(x) = 2Arc\tan\left(\frac{x-a}{x+a}\right) \quad ; \quad x > a \end{cases}$$

1. حدد $\mathscr{D}_a$ حيز تعريف الدالة f_a وأحسب نهاياتها عند محدات $\mathscr{D}_a$.
2. أدرس اتصال الدالة f_a على $\mathscr{D}_a$.
3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_a في النقطة $x_0 = a$ ، وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصلة.
4. أدرس تغيرات الدالة f_a.
5. أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_a)$ الممثل للدالة f_a في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، وحدد نقطة انعطافه.
6. أ- بين أن f_1 تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال I ينبغي تحديده.

ب- أحسب $f_1^{-1}(x)$ لكل $x\in I$.

جـ- أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_1)$ وأنشئ المنحنى (Γ_1) الممثل للدالة f_1^{-1} في نفس المعلم.

التمرين 6 :

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt[3]{x-1}}{1+\sqrt[3]{x-1}} \quad ; \quad x \ge 1 \\ f(x) = Arc\tan\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\right) \quad ; \quad x < 1 \end{cases}$$

1. تحقق من أن حيز تعريف الدالة f هو $\mathbb{R}^+$.
2. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. بين أن الدالة f متصلة في النقطة 1 .
4. علل ، بعناية ، اتصال الدالة f على المجال $]0,1[$.
5. ليكن g قصور الدالة f على المجال $[1,+\infty[$.

أ- نضع : $h(x) = \frac{x}{1+x}$. تحقق من أن :

$$\forall x\in[1,+\infty[\quad : \quad g(x) = h\left(\sqrt[3]{x-1}\right) + \frac{\pi}{2}$$

ب- استنتج أن g تزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$.

جـ- بين أن g تقابل من $[1,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده.

د- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من المجال J.